Concours en Mathématiques et Physique

Epreuve de Physique

Date : Jeudi 05 Juin 2008	**Heure : 8 H 00**	**Durée : 4 H**	**nbre de pages : 08**
Barème :	**Problème 1 : 11 pts (5,5 + 5,5);**	**Problème 2 : 9 pts (6 + 3)**	

L'usage d'une calculatrice non programmable est autorisé.

L'épreuve comporte deux problèmes indépendants.
Un candidat peut toujours se servir d'un résultat fourni par l'énoncé pour continuer sa composition.

L'espace est rapporté à un repère (Oxyz) de base orthonormée directe ($\vec{u}_x$, $\vec{u}_y$, $\vec{u}_z$).

PROBLEME 1 : INTERFERENCE ET DIFFRACTION DE LA LUMIERE

On envisage dans ce problème d'étudier la possibilité de mesurer l'écart entre deux longueurs d'ondes voisines à l'aide de l'interféromètre de Michelson utilisé en lame d'air à faces parallèles et à l'aide d'un prisme en utilisant les lois de la diffraction.

Rappels

- L'amplitude complexe $\underline{s}(M)$ diffractée en un point M supposé à l'infini par une ouverture plane de surface Σ et de facteur de transmission complexe $\underline{t}(P)$ éclairée par une onde plane est donnée par :

$$\underline{s}(M) = \alpha \; \underline{s}_0 \int\!\!\int_{\Sigma} \underline{t}(P) \exp[j(\vec{k}_d - \vec{k}_i).\overrightarrow{OP}]\, d\Sigma$$

où $d\Sigma$ représente la surface élémentaire entourant un point P de l'ouverture, $\vec{k}_i$ et $\vec{k}_d$ sont les vecteurs d'onde associés respectivement à l'onde incidente et à l'onde diffractée. α est une constante et $\underline{s}_0$ est l'amplitude complexe de l'onde incidente.

L'intensité lumineuse I est définie par $I = \underline{s}\,\underline{s}^*$, où $\underline{s}^*$ désigne le complexe conjugué de $\underline{s}$.

- La fonction sinus cardinal sinc(u) est définie par $\mathrm{sinc}(u) = \dfrac{\sin(u)}{u}$.

***Première partie* : Mesure d'écart entre deux longueurs d'ondes voisines par interférométrie**

L'interféromètre de Michelson est constitué d'une lame semi réfléchissante, non absorbante, appelée séparatrice (L_S) dont les facteurs de transmission et de réflexion en intensité valent 1/2, et de deux miroirs plans M_1 et M_2 perpendiculaires l'un à l'autre (Figure 1).
La lame (L_S) est inclinée à 45° par rapport aux normales à M_1 et M_2. L'interféromètre est plongé dans l'air dont l'indice de réfraction sera pris égal à 1.
On suppose que (L_S) n'introduit aucun déphasage supplémentaire.

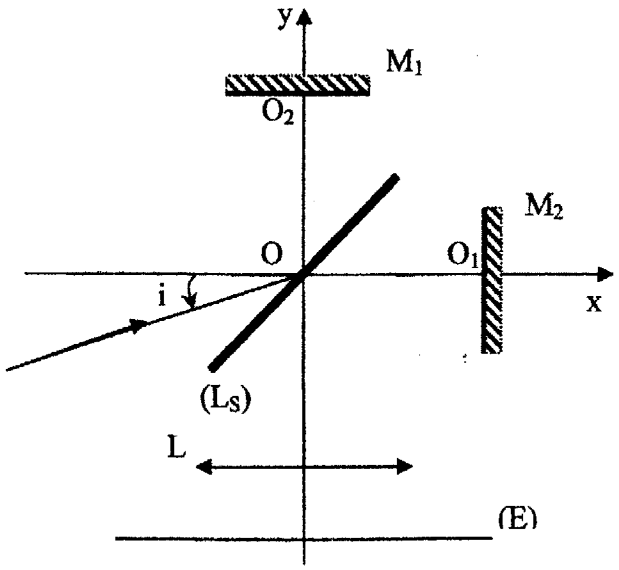

Figure 1

Source de lumière monochromatique

L'interféromètre de Michelson est éclairé par une source étendue S supposée parfaitement monochromatique de longueur d'onde $\lambda = 589{,}3$ nm.
Initialement, l'interféromètre est réglé à la "teinte plate", situation appelée aussi "contact optique" ($OO_1 = OO_2$). On translate le miroir M_2 grâce à un vis de chariotage normalement à son plan d'une distance e = 1,05 mm dans la direction des x positifs. On observe alors des anneaux sur un écran (E) placé dans le plan focal image d'une lentille mince convergente L de distance focale f = 1 m.

1.a) Compléter la figure 1 en faisant apparaître le cheminement des deux rayons qui interfèrent en un point M de (E).

1.b) Quel est le rôle de la lentille convergente ?

2.a) En raisonnant sur la lame d'air équivalente, montrer que la différence de chemin optique δ entre les deux ondes qui interfèrent au point M a pour expression :

$$\delta(M) = 2e \cos i$$

2.b) Expliquer pourquoi les franges d'interférences sont des anneaux.
Qu'appelle-t-on ces anneaux d'interférences ? Justifier.

2.c) Déterminer l'expression de l'intensité I(M) résultant de l'interférence de deux ondes de même intensité I_0 en un point M de (E) en fonction de I_0, i et de l'ordre d'interférence au centre p_0.

On s'intéresse dans la suite de cette partie aux incidences i *faibles.*

On désigne par i_k l'incidence correspondant au k-ième anneau sombre (compté à partir de i = 0).

3.a) Quelle est la nature du centre des anneaux ?

3.b) Déterminer l'expression des angles i_k correspondant aux minima d'intensité en fonction de k, λ et e.

En déduire la loi de variation du carré du rayon R_k du k-ième anneau sombre en fonction du numéro k.

3.c) En déduire une méthode expérimentale pour mesurer la longueur d'onde.

3.d) Déterminer l'expression de l'erreur relative sur la détermination expérimentale de λ.

<u>Source de lumière bichromatique</u>

On remplace la source S monochromatique qui éclairait le dispositif de Michelson par la lampe spectrale de sodium. Les deux radiations émises par la lampe sont de longueurs d'onde voisines λ_1 et $\lambda_2 = \lambda_1 + \Delta\lambda$ et de même intensité ($0 < \Delta\lambda << \lambda_1$).

On fera l'approximation $\lambda_1\lambda_2 \approx \lambda^2$ où λ = 589,3 nm désigne la longueur d'onde moyenne du doublet émis par cette lampe.

4) A partir du contact optique on déplace le miroir M_2 de façon à faire défiler les anneaux. On constate que les anneaux disparaissent au voisinage du centre pour la quatrième fois lorsque le déplacement de M_2 est e = 1,01 mm.

4.a) Expliquer les raisons de la disparition des anneaux.

4.b) Déterminer l'intensité $I(\lambda_1)$ et $I(\lambda_2)$ en un point M de (E). On fera apparaître dans ces expressions l'intensité maximale I_{max} correspondant à des interférences constructives produites par une longueur d'onde donnée.

4.c) En déduire que l'intensité résultante I en un point M de (E) a pour expression :

$$I = I_{max}\,[1 + V\cos\frac{2\pi\delta}{\lambda}]$$

où V est à expliciter. Que représente |V| ?

4.d) En déduire $\Delta\lambda$.

5) Le dispositif de Michelson est réglé en lame d'air. On déplace le miroir M_2 de façon à augmenter progressivement l'épaisseur de la lame d'air. Lors de cette opération on constate que le contraste des anneaux s'annule au voisinage du centre successivement pour les valeurs de e indiquées dans le tableau ci-dessous.

e (mm)	1,01	1,30	1,59	1,88

On désigne par p_{λ_1} et p_{λ_2} les ordres d'interférences associés respectivement aux longueurs d'ondes λ_1 et $\lambda_2 = \lambda_1 + \Delta\lambda$ correspondant à un brouillage de la figure d'interférence.

D'après les mesures expérimentales, si on trace $\Delta p = p_{\lambda_1} - p_{\lambda_2}$ en fonction de l'épaisseur e, on trouve une droite.

5.a) Déterminer l'équation de cette droite.

5.b) Déterminer la variation de Δp entre deux annulations successives du contraste.

En déduire, à partir des valeurs expérimentales, l'écart $\Delta\lambda$.

Deuxième partie : Mesure d'écart entre deux longueurs d'ondes voisines avec un prisme

On se propose de déterminer le pouvoir de résolution intrinsèque d'un spectroscope à prisme. Pour ce faire, on éclaire un prisme par une source ponctuelle S placée au foyer objet d'une lentille convergente L_1 de distance focale f_1. On étudie la lumière diffractée sur un écran (E) placé dans le plan focal image d'une lentille convergente L_2 de distance focale f_2 (Figure 2).
Le prisme, de hauteur h et d'angle au sommet A très faible, est constitué d'une substance en flint transparente, homogène, isotrope et d'indice de réfraction $n(\lambda)$ obéissant à la loi de Cauchy qui s'écrit en première approximation :

$$n(\lambda) = C + \frac{B}{\lambda^2}, \text{ avec } C \approx 1{,}6 \text{ et } B \approx 10^{-2}\ \mu m^2.$$

Le prisme est plongé dans l'air dont l'indice de réfraction sera pris égal à 1. L'épaisseur e de la base du prisme est très faible devant sa hauteur h. L'arête du prisme de longueur *a* parallèlement à (OY) est suffisamment grande devant λ pour ne considérer que la diffraction dans la direction des X. On suppose que la face d'entrée du prisme constitue le diaphragme diffractant.
On donne e = 0,5 cm ; h = 5 cm ; f_1 = 20 cm et f_2 = 1 m.

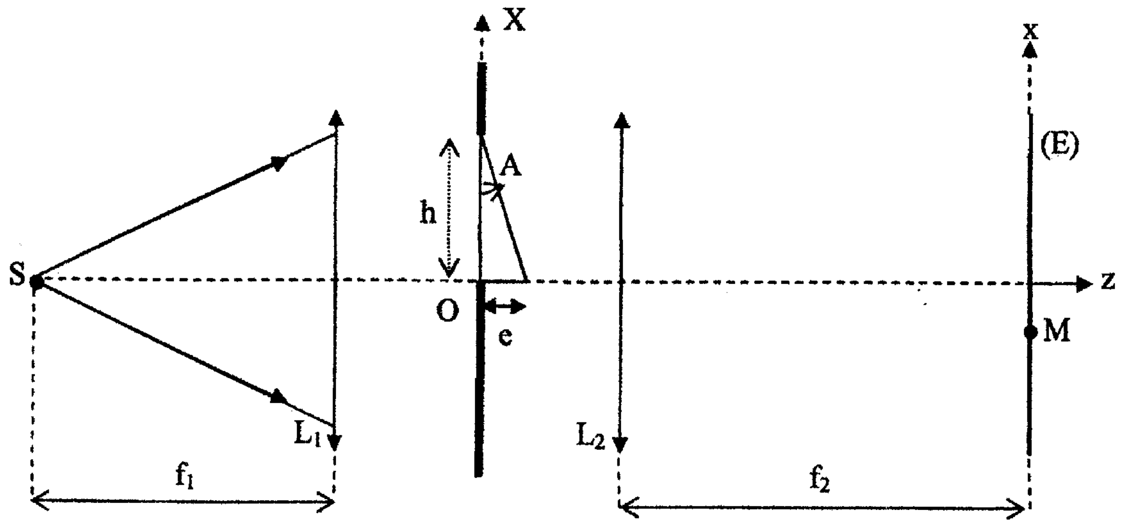

Figure 2

Source monochromatique

La source ponctuelle S éclairant le prisme est monochromatique de longueur d'onde λ.
1.a) Compléter la figure 2 en faisant apparaître le cheminement des rayons qui arrivent au point M de (E).
1.b) Montrer que la déviation D du rayon émergent par rapport au rayon incident est :

$$D = (n - 1)\, A$$

2) Compte tenu de l'effet du prisme sur la phase de l'onde, "l'ouverture" formée par le prisme possède un facteur de transmission complexe $\underline{t}(X)$ dont l'expression est de la forme :

$$\underline{t}(X) = \exp\left[j\, \frac{2\pi}{\lambda}\big((1-n) A X\big) \right] \text{ si } 0 \le X \le h$$

$$\underline{t}(X) = 0 \text{ ailleurs}$$

2.a) Déterminer l'amplitude complexe $\underline{s}(M)$ diffractée en M.

2.b) En déduire que l'expression de l'intensité I diffractée en M s'écrit sous la forme :

$$I(x) = I_0 \operatorname{sinc}^2\left[\frac{\pi h\left(x - x_0(\lambda)\right)}{\lambda f_2}\right]$$

où $x_0(\lambda)$ est à exprimer en fonction de n, f_2, e et h.

Vérifier que la distribution de l'intensité est centrée sur la direction prévue par l'optique géométrique.

Source de lumière bichromatique

3) On désire à présent déterminer le pouvoir de résolution du prisme en utilisant le critère de Rayleigh.

3.a) Expliquer brièvement pourquoi ce dispositif constitue un spectroscope.

3.b) Déterminer la position du premier minimum nul d'intensité de la figure de diffraction pour la longueur d'onde λ.

3.c) Déterminer l'écart $d\lambda_{min}$ entre deux radiations de longueurs d'ondes voisines (λ et $\lambda + d\lambda_{min}$) tout juste résolue selon le critère de Rayleigh.

En déduire alors que le pouvoir de résolution théorique $R_0 = \dfrac{\lambda}{|d\lambda_{min}|}$ a pour expression :

$$R_0 = \frac{2eB}{\lambda^3}$$

4) Au fait la source éclairant le prisme est une fente source de largeur $\ell_e = 0{,}3$ mm parallèlement à (OX). Le prisme n'est pas alors éclairé sous une incidence unique i, mais sous un ensemble d'incidences variant entre $i - \dfrac{\Delta\theta_e}{2}$ et $i + \dfrac{\Delta\theta_e}{2}$, où $\Delta\theta_e = \dfrac{\ell_e}{f_1}$ est la largeur angulaire de la fente source vue depuis la lentille de distance focale f_1.

4.a) Construire l'image géométrique de la fente source de largeur ℓ_e sur (E).

Montrer alors que la taille de l'image géométrique ℓ_g de la fente source sur (E) est donnée par :

$$\ell_g = \ell_e \frac{f_2}{f_1}$$

4.b) Comparer ℓ_g à la taille de la tache centrale de diffraction sur l'écran.

Expliquer alors pourquoi la taille de l'image géométrique de la fente source limite le pouvoir de résolution.

On donne : λ = 589,3 nm.

En déduire que la nouvelle expression du pouvoir de résolution s'écrit :

$$R = R_0 \frac{\lambda f_1}{h \ell_e}$$

4.c) La lampe éclairant le dispositif est celle du sodium possédant une raie double telle que $\lambda_1 = 589$ nm et $\lambda_2 = 589{,}6$ nm.

Est-ce que ce doublet est résolu par ce dispositif ? Justifier.

Probleme 2 : Induction electromagnetique et transferts thermiques

Ce problème comporte deux parties complètement indépendantes.

Un point M de l'espace est repéré par ses coordonnées cylindriques (r, θ, z) dans la base cylindrique ($\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z$).

Première partie : Induction électromagnétique

A l'aide d'un fil en cuivre, on constitue un solénoïde d'axe Oz, de rayons intérieur R_i et extérieur R_e, de longueur finie L, comportant N spires circulaires jointives isolées électriquement les unes des autres par un isolant d'épaisseur négligeable. Le fil conducteur, de conductivité électrique constante σ, est de section rectangulaire dont la longueur est $\ell = \frac{L}{N}$ et la largeur est R_e - R_i (Figure 1). On admettra l'hypothèse d'un courant uniformément réparti dans le solénoïde avec une densité volumique $\vec{j} = j\,\vec{u}_\theta$.

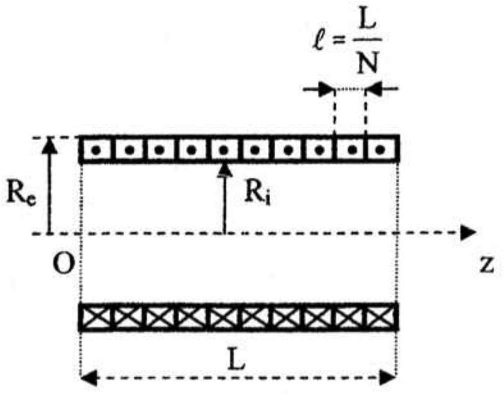

Figure 1

On désigne par $R_m = \frac{R_i + R_e}{2}$ le rayon moyen d'une spire.

On place le solénoïde dans un champ magnétique radial, $\vec{B} = -B_0\,\vec{u}_r$, où B_0 est une constante positive.

1) Déterminer la résistance R_S du solénoïde. On la mettra sous la forme $R_S = N^2\, r_s$ où r_s est à exprimer en fonction de σ et des paramètres géométriques du problème.

2.a) Déterminer la force de Laplace $\vec{f}$ qui s'applique sur une spire de section rectangulaire de longueur $\ell = \frac{L}{N}$ et de largeur $R_e - R_i$ parcourue par une densité volumique de courant uniforme $\vec{j}$ circulant suivant $\vec{u}_\theta$.

En déduire que $\vec{f}$ est de la forme :

$$\vec{f} = 2\pi R_m I B_0\ \vec{u}_z .$$

où I est l'intensité du courant qui circule dans une spire.

2.b) En déduire que la résultante de la force de Laplace $\vec{F}$ qui s'applique sur le solénoïde s'écrit $\vec{F} = N I k_1\ \vec{u}_z$ où k_1 est une constante à exprimer en fonction de B_0 et de R_m.

3) Dans toute la suite de cette partie le solénoïde se déplace le long de son axe Oz à la vitesse

$$\vec{v} = \frac{dz}{dt}\,\vec{u}_z = v\,\vec{u}_z .$$

3.a) Déterminer l'expression du champ électromoteur $\vec{E}_m$.

3.b) En déduire la force électromotrice (f.e.m) induite e qui apparaît aux bornes d'une spire de rayon moyen R_m et la mettre sous la forme $e = k_2\, v$.

Quelle est l'expression de la f.e.m totale E dans le solénoïde ?

3.c) Comparer k_1 à k_2 et retrouver le résultat énergétiquement.

4) On rappelle qu'un solénoïde parcouru par un courant I crée en un point M quelconque de son axe compris entre z = 0 et z = L (Figure 2) un champ magnétique :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 N I}{2L}(\cos\theta_1 - \cos\theta_2)\vec{u}_z .$$

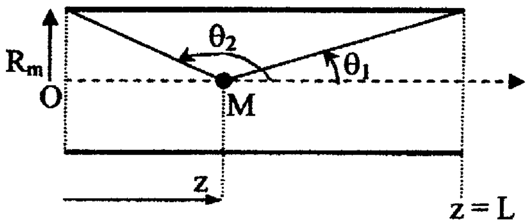

Figure 2

4.a) Déterminer l'expression du champ magnétique au centre du solénoïde $\vec{B}(L/2)$.

4.b) On admettra pour le calcul de l'énergie magnétique que le champ magnétique est uniforme à l'intérieur et a la valeur au centre du solénoïde $[B(z) = B(L/2)]$ et que le champ magnétique à l'extérieur est nul.

Déterminer l'expression de l'énergie magnétique W_m emmagasinée dans le solénoïde de rayon R_m.

En déduire l'expression de l'inductance propre $\mathcal{L}$ du solénoïde.

Mettre cette expression sous la forme $\mathcal{L} = N^2 h$ où h est à expliciter.

5) Dans ce qui suit, on alimente le solénoïde en mouvement par une source de tension constante de valeur U. Les grandeurs U, E et I seront orientées dans le même sens.

5.a) Donner le schéma électrique équivalent du circuit et déterminer l'équation différentielle électrique liant E, U et I.

5.b) En déduire l'équation différentielle suivante :

$$U = N\left(r_s\, I_e + h\frac{dI_e}{dt} - k_2\, v\right)$$

où $I_e = NI$ est l'intensité du courant équivalent.

5.c) Déterminer le nombre de spires N_0 permettant d'atteindre en régime permanent (courant et vitesse constants), la force de Laplace F (calculé en 2b) correspondant à la densité volumique de courant uniforme j, à la vitesse v_0 et sous la tension d'alimentation U_0.

Quel est l'effet de l'augmentation du nombre de spires pour une source donnée ?

6) On applique à t = 0 au solénoïde de rayon moyen R_m un échelon de tension continue d'amplitude U_0.

Déterminer l'expression de l'intensité I(t) du courant circulant dans <u>une spire</u> de rayon R_m dans les deux cas suivants :

a) le solénoïde est immobilisé ;

b) le solénoïde se déplace à la vitesse constante v_0 donnant ainsi naissance à une force électromotrice induite E_0.

On fera apparaître une constante de temps électrique τ_e qu'on explicitera.

<u>Deuxième partie</u> : Transferts thermiques

Le solénoïde précédent de rayons intérieur R_i et extérieur R_e et de longueur L est constitué de N spires de section rectangulaire en cuivre homogène, de conductivité électrique σ supposée constante, de chaleur massique c et de masse volumique μ. L'isolant d'épaisseur négligeable se trouve uniquement entre les spires.

Le solénoïde est parcouru par un courant de densité volumique uniforme j.

On suppose que le solénoïde baigne dans l'air à la température constante T_a.

On admettra les hypothèses suivantes :

- On néglige les transferts thermiques par conduction et par rayonnement ;

- le flux thermique est radial et le transfert thermique a lieu vers l'intérieur comme vers l'extérieur du solénoïde ;
- la température ambiante T_a est la même à l'intérieur ($r < R_i$) et à l'extérieur ($r > R_e$) du solénoïde ;
- la conductivité thermique du matériau conducteur est supposée *infinie* de façon à ce que l'on puisse supposer la température du solénoïde T_S uniforme ($T_S(M,t) = T_S(t)$) ;
- le solénoïde s'échauffe de façon homogène et on admet que l'accroissement de la température $\Delta T = T_S - T_a$, par rapport à la température ambiante, peut être déterminé en supposant que l'évacuation de la chaleur vers le milieu extérieur (air) se fait uniquement par un transfert conducto-convectif.

1) Déterminer la capacité thermique C_t du solénoïde en fonction de c, μ, R_e, R_i et L.

2) Montrer que la puissance totale dissipée par effet Joule P_J a pour expression :

$$P_J = \frac{j^2}{\sigma} L \pi (R_e^2 - R_i^2)$$

3) On admet que les transferts thermiques à l'interface entre l'air ambiant à la température T_a et l'une des surfaces du solénoïde à la température T_S sont caractérisés par le coefficient d'échange thermique conducto-convectif h supposé indépendant du matériau conducteur. Le conducteur ne se refroidit donc que par l'effet de la convection de l'air ambiant, à travers toute sa surface latérale.

La puissance thermique surfacique φ échangée par le conducteur avec l'air est régie par la loi de Newton : $\varphi = h\,(T_S - T_a)$.

3.a) Déterminer la puissance P_e évacuée par les deux parois de rayons R_i et R_e et de longueur L.

En déduire l'expression de la résistante thermique R_t d'échange avec le milieu extérieur en fonction de h, R_e, R_i et L.

3.b) En faisant un bilan d'énergie, déterminer l'évolution de l'accroissement de la température $\Delta T(t) = T_S(t) - T_a$ lorsque le solénoïde est parcouru par un courant de densité volumique j.

On fera apparaître une constante de temps τ_t qu'on exprimera en fonction de R_t et C_t.

A t = 0, le solénoïde est porté à la température ambiante T_a.

Tracer la courbe $T_S(t)$.

3.c) Déterminer l'expression de la densité de courant j_p pour un fonctionnement en régime permanent avec un échauffement de $\Delta T = \Delta T_p$.

Fin de l'Epreuve